Yüksek Mertebeden Türevler

$f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in D$ için türevlenebilir ise bunun türevi olan $f': D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyondur. Bu fonksiyona f fonksiyonunun 1. mertebeden türevi denir. Eğer $f': D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in D$ için türevlenebilir ise $(f')': D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır ve tanımlıdır. Bu fonksiyona f nin 2. mertebeden türevi denir ve $(f')' = f''$ gösterimi kullanılır.

f nin sıfırıncı mertebeden türevi kendisi olup $f^0(x) = f(x)$ dir. n. mertebeden türev için $f^{(n)}(x) = D^n(f(x))$ sembolü kullanılır.

UYARI: Herhangi bir fonksiyonun n. mertebeden türevi olması için $(n-1)$. mertebeden türevi var olmalıdır.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonu için $f', f'', f''', \ldots$ fonksiyonlarını bulalım.

$x > 0$ için $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$

$x < 0$ için $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

$x = 0$ için türevi bulalım.

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 0}{x} = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = 0$$

$\Rightarrow f'(0) = 0$ dır.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ 2x, & x<0 \end{cases}$$ $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bulunur.

$f''(0)$ için yine sağ ve sol türevlerine bakalım.

$$f''(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2-0}{x-0} = 0$$

$$f''(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x-0}{x} = 2$$

$f''(0^+) \neq f''(0^-)$ olup $f''(0)$ yoktur.

O halde f fonksiyonu $x=0$da 1. mertebeden türevlenebilirdir.

__NOT__: f ve g fonksiyonları r. mertebeden türevlenebilir iki fonksiyon olsunlar.

$m+n \leq r$ olm. üz. $D^m(D^n(f(x))) = D^{m+n}(f(x))$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $n \leq r$ olmak üz. $D^n(\lambda f(x)) = \lambda D^n(f(x))$

$n \leq r$ olmak üz. $D^n((f+g)(x)) = D^n(f(x)) \mp D^n(g(x))$

Örnek: $f(x) = \cos 2x$, $f^{(n)}(x) = ?$

$f(x) = \cos 2x$

$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2$

$f''(x) = -\cos 2x \cdot 2 \cdot 2$

$f'''(x) = \sin 2x \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$f^{(IV)}(x) = \cos 2x \cdot 2^4$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}n\right) 2^n$

Örnek: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f^{(n)}(1) = ?$

$$f(x) = x^{-1}$$
$$f'(x) = -x^{-2}$$
$$f''(x) = 2x^{-3}$$
$$f'''(x) = -2.3.x^{-4}$$
$$f^{(IV)}(x) = 2.3.4.x^{-5}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-(n+1)}$$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$$

Kapalı Fonksiyonların Türevi

Tanım: $y=f(x)$ açık fonksiyon şeklinde yazılamayan fakat y nin x'in bir fonksiyonu olduğu $F(x,y)=0$ şeklindeki fonksiyonlara kapalı fonksiyon denir.

Bu tür fonksiyonların türevi alınırken y, x in bir fonksiyonu olduğu düşünülerek zincir kuralı ile eşitliğin her iki yanının x e göre türevi alınır.

II. yol: $F(x,y)=0$ için

F_x : sadece x değişkenine göre türev
F_y : " y " "

$y' = -\frac{F_x}{F_y}$ dir.

131

Örnek: $x^3y - xy^2 + 2y^3 + 5x = 0 \qquad y' = \frac{dy}{dx} = ?$

$$x^3y - xy^2 + 2y^3 + 5x = 0 \quad , \quad y = f(x)$$

$$3x^2y + x^3y' - (y^2 + 2xyy') + 6y^2 \cdot y' + 5 = 0$$

$$y'(x^3 - 2xy + 6y^2) = y^2 - 3x^2y - 5$$

$$y' = \frac{y^2 - 3x^2y - 5}{x^3 - 2xy + 6y^2}$$

veya $F_x = 3x^2y - y^2 + 5$, $F_y = x^3 - 2xy + 6y^2$ olmak üzere

$$y' = -\frac{(3x^2y - y^2 + 5)}{x^3 - 2xy + 6y^2}$$

Örnek: $x\tan(xy) - 1 = 0 \qquad y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ olmak üzere

$y' = ?$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\tan(xy) + x\,(1 + \tan^2(xy)) \cdot y}{x\,(1 + \tan^2(xy)) \cdot x}$$

Parametrik Fonksiyonların Türevi

Tanım: $y = f(x)$ şeklinde açık halde yazılamayan veya yazılmamış, herhangi bir ortak değişkene göre ifade edilen fonksiyonlara parametrik fonksiyonlar denir.

$t \in [a,b]$ iken $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ile tanımlı fonksiyon bir parametrik gösterimdir.

Bu fonksiyonların 1. türevi

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$ ile bulunur.

2. türevi

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Benzer şekilde 3. türevi

$$y''' = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$ ile bulunur.

Örnek: $\begin{cases} x(t) = t^2\cos t \\ y(t) = t\sin t \end{cases}$ $\qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{6}} = ?$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \left.\frac{\sin t + t\cos t}{2t\cos t - t^2\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi^2}{36}\frac{1}{2}}$$

Örnek: $\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 4\sin t \end{cases}$ $\qquad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = ?$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\cos t}{-3\sin t}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-4\sin t(-3\sin t) - 4\cos t(-3\cos t)}{9\sin^2 t}}{-3\sin t}$$

$$y'' = \frac{12\sin^2 t + 12\cos^2 t}{-27\sin^3 t} = \frac{12}{-27\sin^3 t}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{-4}{9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{-16}{9\sqrt{2}}$$

Değişim Oranı olarak Türev

$y=f(x)$ şeklinde verilen bir fonksiyonda x'e yapılan bir h arttırımına karşılık fonksiyondaki değişim

$$\Delta y = \Delta f(x) \text{ ise}$$

$\Delta f = f(x+h) - f(x)$ dir. Ayrıca değişimlerin oranı

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ dir.}$$

Bu oran f nin x ile $x+h$ arasındaki ortalama değişimdir.

Eğer $h \to 0$ giderken limiti alınırsa $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ değişimlerin oranı x noktasındaki anlık değişimi verir.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \text{ dir.}$$

Örnek: Bir dairenin alanı A ve çapı D olsun.

a) Çapın $D=2$ den $D=5$ e büyüdüğündeki ortalama alan değişimini

b) Çapın 10 olduğundaki alandaki anlık değişimin oranı nedir?

ÇÖZÜM: Dairenin alanı $A = \pi r^2$, çapı $D \Rightarrow r = \frac{D}{2}$

$$A = \pi \frac{D^2}{4}$$

a) $$\frac{\Delta A}{\Delta D} = \frac{\frac{25\pi}{4} - \frac{4\pi}{4}}{5-2} = \frac{7\pi}{4}$$

b) $D=10$ m olduğundaki anlık değişim oranı

$$A'(D) = \frac{dA}{dD} = \left.\frac{\pi D}{2}\right|_{D=10} \cong 15.7$$

NOT: Bir cismin yol denklemi $X(t)$ ise $[t_0, t_1]$ aralığında

$X'(t_1)$, t_1 anındaki anlık hızı, ortalama hızı

$X''(t_1)$, t_1 " ivmesini verir.